CONCOURS GÉNÉRAL DES SCIENCES ET TECHNIQUES
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
JUILLET 2019
DURÉE : 4 HEURES

Ce document ne constitue pas le texte originale de l'épreuve, elle a été réécrite. Les solutions proposées ne sont pas officielles. Cependant, le document peut contenir des coquilles, des fautes de saisie ...

* * * * *

Le sujet de l'épreuve de mathématiques du concours général des sciences et techniques, session 2019, est composé de trois problèmes à traiter dans l'ordre souhaité.

Pour répondre à une question de ces problèmes, tout candidat peut admettre et utiliser les résultats des questions qui la précédent, même si ne l'ai a pas traité, à condition d'indiquer avec précision les références des questions utilisées.

Il est à noter que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de mentionner les références des questions abordées.

L'usage de tout document ou matériel électronique est interdit

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Définitions et notations

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ celui des nombres réels et $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dit non trivial s'il contient au moins deux éléments distincts.
- Pour tout $(r,k) \in \mathbb{N}^2$, avec $k \leq r$, on note $\binom{r}{k}$ le coefficient binomial défini par $\binom{r}{k} = \dfrac{r!}{k!(r-k)!}$.
- Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur I; soit p un entier naturel non nul. Par convention, on pose $f^{(0)} = f$. On dit que la fonction f est un fois dérivable sur I si elle est dérivable sur I; dans ce cas, on pose $f^{(1)} = f'$, où f' la fonction dérivée de f, où f' la fonction dérivée de f; $f^{(1)}$ est appelée la fonction dérivée de f d'ordre 1 de la fonction f. On dit que la fonction f est deux fois dérivable sur I si la fonction $f^{(1)}$ est dérivable sur I, dans ce cas, on pose $f^{(2)} = (f^{(1)})'$ où $(f^{(1)})'$ la fonction dérivée de $f^{(1)}$; $f^{(2)}$ est appelée la fonction dérivée d'ordre 2 de f; la fonction $f^{(2)}$ s'appelle aussi la dérivée seconde de f et se note f''. Par récurrence, on dit que la fonction f est p-fois dérivable sur I avec $p \geq 2$, si la fonction $f^{(p-1)}$ est dérivable sur I, dans ce cas on pose $f^{(p)} = (f^{(p-1)})'$, où $(f^{(p-1)})'$ est la fonction dérivée de $f^{(p-1)}$, $f^{(p)}$ est appelée la fonction dérivée d'ordre p de la fonction de f.

Problème I
À propos de l'indépendance linéaire de la famille $(1, e, e^2)$
PARTIE I

1. **Construction du nombre réel e, base du logarithme néperien**
   On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :
   $$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$
   pour tout entier naturel non nul n.

(a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On note e leur limite commune.

(b) Justifier que $u_n < e < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) **Irrationalité de e**
Raisonnons par l'absurde, on suppose que e est rationnel et on pose $e = p/q$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^*\mathbb{N}^*$. Montrer que $q!u_q$ est un entier et conclure à une contradiction.

2. **Convergence d'une suite d'entiers**
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente d'entiers relatifs dont la limite est nulle. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad x_n = 0$$

3. **Formule de Taylor avec reste intégrale**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$-dérivable sur I, de dérivée d'ordre $(n+1)$ continue sur I. Soient a et b deux éléments de I; pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on pose

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$R_{k-1} = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k$$

(b) En déduire la formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégrale suivante,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

PARTIE II
APPLICATION AU RÉSULTAT D'INDÉPENDANCE LINÉAIRE

On suppose qu'il existe trois nombres rationnels α, β, γ tels que $\alpha + \beta e + \gamma e^2 = 0$.

1. Montrer qu'on peut supposer les nombres α, β et γ des entiers relatifs.
On suppose désormais que les nombres α, β et γ sont des entiers relatifs et on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha e^{-x} + \gamma e^x$$

2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \alpha e^{-x} + \gamma e^x$$

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha e^{-1} + \gamma e = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma + (-1)^k \alpha}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}((-1)^{n+1}\alpha e^{-t} + \gamma e^t)\,\mathrm{d}t$$

4. On considère la suite numérique $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = \int_0^1 (1-t)^n((-1)^{n+1}\alpha e^{-t} + \gamma e^t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

5. En déduire qu'il existe $n_0 \in\in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$n!\beta + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}(\gamma + (-1)^k \alpha) = 0$$

6. Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Problème II

À propos des parties de $\mathbb{C}$ stables par produit et par somme de deux carrés de ses éléments

définitions et notations

Définition 1. Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}$ est dite *vérifie la propriété $\mathcal{P}$*, si elle est non vide et si de plus elle vérifie

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}, \qquad z_1 z_2 \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad z_1^2 + z_2^2 \in \mathcal{A}$$

Définition 2. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{A}$; si l'ensemble $\{z \in \mathcal{A}, \quad |z| \leq 1\}$ est fini, son cardinal se notera $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, dans le cas contraire, on posera $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = +\infty$.

PARTIE I

PREMIERS EXEMPLES DE PARTIES DE $\mathbb{C}$ VÉRIFIANT LA PROPRIÉTÉ $\mathcal{P}$

1. Vérifier que les ensembles suivants sont des parties de C vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ et préciser pour chacun d'eux la valeur de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$,

$$(i)\ \mathcal{A} = \mathbb{N}^*, \qquad (ii)\ \mathcal{A} = \mathbb{Z}, \qquad (iii)\ \mathcal{A} =]1, +\infty[, \qquad (iv)\ \mathcal{A} = \mathbb{C}$$

2. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$, on note $\overline{\mathcal{A}}$ l'ensemble $\{\overline{z}, \quad z \in \mathcal{A}\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée des conjugués des éléments de $\mathcal{A}$.
   Montrer que la partie $\overline{\mathcal{A}}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et déterminer $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{A}})$ en fonction de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

3. **Les nombres entiers de Gauss**
   On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble $\{a + ib, \quad (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constitués de tous les nombres complexes de la forme $a + ib$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Les éléments de $\mathbb{Z}[i]$ sont appelés *les entiers de Gauss.*
   (a) Montrer que
   $$(\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[i]^2), \quad z_1 + z_2 \in \mathbb{Z}[i] \quad \text{et} \quad z_1 z_2 \in \mathbb{Z}[i]$$
   (b) En déduire que $\mathbb{Z}[i]$ est une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.
   (c) Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers relatifs tels que $a^2 + b^2 \leq 1$ puis en déduire que $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[i]) = 5$.

4. **Un autre exemple**
   On pose $\mathcal{A}_1 = \{z \in \mathbb{C}, \quad z^2 \in \mathbb{Z}[i]\}$; ainsi un nombre complexe z est dans $\mathcal{A}_1$ si et seulement si son carré est dans $\mathbb{Z}[i]$.
   (a) Montrer que $\mathcal{A}_1$ est une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.
   (b) Pour $\alpha \in \{-i, -1, 0, 1, i\}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = a$ puis déterminer la valeur de $\mathcal{C}(\mathcal{A}_1)$.

PARTIE II

ÉTUDE DE TROIS AUTRES EXEMPLES

On considère le nombre complexe $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et on note $\mathbb{Z}[j] = \{a + bj, \quad (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée de tous les nombres complexes de la forme $a + bj$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

1. **Un premier exemple**
   (a) Calculer j^3 et en déduire la valeur du nombre $1 + j + j^2$.
   (b) Montrer que
   $$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[j]^2, \quad z_1 + z_2 \in \mathbb{Z}[j] \quad \text{et} \quad z_1 z_2 \in \mathbb{Z}[j]$$
   (c) En déduire que $\mathbb{Z}[j]$ est une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.
   (d) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (a, b) vérifiant l'inégalité $(2a - b)^2 + 3b^2 \leq 4$ puis en déduire que $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[j]) = 7$.

2. **Un deuxième exemple**
   Dans cette question, on considère la partie $\mathbb{Z}[j]^*$, c'est l'ensemble $\mathbb{Z}[j]$ privé de le nombre comple nul 0.
   (a) Soient z_1 et z_2 deux éléments de $\mathbb{Z}[j]$. Montrer que si $z_1^2 + z_2^2 = 0$, alors $z_1 = z_2 = 0$.
   On pourra factoriser l'expression $z_1^2 + z_2^2$ puis remarquer que le nombre $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.
   (b) Montrer que $\mathbb{Z}[j]^*$ est une partie de C vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.
   (c) Pour tout $\beta \in \{-j^2, -j, j, j^2\}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \beta$ puis déterminer la valeur de $\mathcal{C}(\mathcal{A}_2)$.

PARTIE III

RECHERCHE DE VALEURS POSSIBLES DE $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

Dans cette partie, on considère une partie $\mathcal{A}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ et on cherche à déterminer les valeurs possibles de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $0 < |a| < 1$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel $n \neq m$, on a $a^n \neq a^m$.
   (b) Montrer alors $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = +\infty$.

2. **Quelques résultats utiles**
   On considère un réel $\theta \in]-\pi, \pi[$ qui n'est ni de la forme $k\pi/6$, ni de la forme $k\pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$, et on pose $b = e^{i\theta}$.

(a) Si $\theta \in]\pi/3, 2\pi/3[$, montrer que $0 < |b^2 + b^4| < 1$.

(b) Si $\theta \in]\pi/6, \pi/3[$, montrer que $0 < |b^4 + b^8| < 1$.

(c) Si $\theta \in]0, \pi/6[$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\theta \in]\pi/3, \pi/2[$ et en déduire que $0 < |b^{2n} + b^{4n}| < 1$.

(d) Si $\theta \in]-2\pi/3, 0[$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |b^{2n} + b^{4n}| < 1$. *On pourra opérer une conjugaison.*

(e) Étudier les cas restants et montrer qu'il existe toujours $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |b^{2p} + b^{4p}| < 1$

3. On suppose dans cette question que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est fini et que $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \geq 2$.

(a) Montrer qu'il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $|a| = 1$.
Un tel a choisi, on le note $a = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$.

(b) Montrer que le nombre a est un multiple $\pi/4$ ou de $\pi/6$.

(c) En déduire que $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \leq 17$.

4. Quels sont les valeurs possibles de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$?

Problème III

théorème de DARBOUX et quelques applications

notations et rappels

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel x. On rappelle et on admet la propriété suivante.
Si I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une application continue, alors φ est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

PARTIE I
théorème de Darboux et une première application

1. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur le segment $[a, b]$; on se donne un réel γ compris entre les deux nombres $f'(a)$ et $f'(b)$ et distinct de chacun d'eux ; si par exemple on a $f'(a) < f'(b)$, alors $\gamma \in]f'(a), f'(b)[$.

(a) Montrer que la fonction $g : t \mapsto f(t) - \gamma t$, définie sur le segment $[a, b]$, n'est pas strictement monotone.

(b) En déduire que la fonction g n'est pas injective et montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \gamma$ (Théorème de Darboux).

2. **Quelques conséquences du théorème de Darboux**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial et soit $h : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable.

(a) Montrer que si la fonction h' ne s'annule pas sur I, alors elle garde un signe constant sur I.

(b) Montrer que $h'(I)$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si $(\lambda, \mu) \in h'(I)^2$, avec $\lambda < \mu$, alors $]\lambda, [\subset h'(I)$.

(c) Montrer que si $h'(I) \subset \mathbb{Z}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in I, \quad h(t) = kt + \beta$$

3. **Une application**
On cherche dans cette section à déterminer tous les couples (J, f) où J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur J telle que

$$\forall t \in J, \quad f'(t) = \lfloor f(t) \rfloor$$

(a) Soit (J, f) un tel couple.

i. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = kt + \beta$$

ii. Si $k = 0$, montrer que $\beta \in [0, 1[$ et que J est un intervalle ouvert non vide quelconque de $\mathbb{R}$.

iii. Si $k \neq 0$, montrer que $J \subset]1 - \beta/k, 1 + (1 - \beta)/k[$.

(b) Déterminer alors tous les couples (J, f) répondant à la question et pour lesquels l'intervalle J est le plus grand possible.

PARTIE II

APPLICATION À L'ÉTUDE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f''(t)| = f(t)$$

1. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0$.
   (a) Étudier le signe de l'application $t \mapsto \frac{f(t)}{t-t_0}$ sur chacun des intervalles $]-\infty, t_0[$ et $]t_0, +\infty[$ puis montrer que $f'(t_0) = 0$.
   On considère les deux applications g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = (f(t) - f'(t))e^t, \qquad h(t) = (f(t) + f'(t))e^{-t}$$

   (b) Vérifier que les applications g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées g' et h'.
   (c) Montrer que g est croissante alors h est décroissante.
   (d) En déduire que f est croissante sur l'intervalle $]-\infty, t_0]$ et décroissante sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$ puis conclure qu'elle est nulle.
   On vient de prouver que si f s'annule sur $\mathbb{R}$, alors elle est identiquement nulle.
2. On suppose à présent que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) \neq 0$$

3. Montrer que la fonction f'' garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.
4. On suppose ici, que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f''(t) > 0$.
   (a) Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$.
   (b) En déduire qu'il existe un couple (α, β) de réels positifs tels que $alpha + \beta > 0$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}$$

5. On suppose ici que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f''(t) < 0$.
   (a) Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
   (b) En déduire qu'il existe un couple (λ, φ) de réels tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \lambda \cos(t + \varphi)$$

   puis trouver une contradiction.
6. Déterminer tous les couples (I, ψ) où I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, le plus grand possible et $\psi : I \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |\psi''(t)| = \psi(t)$$

* * * * *